

2.7. Projective Morphisms

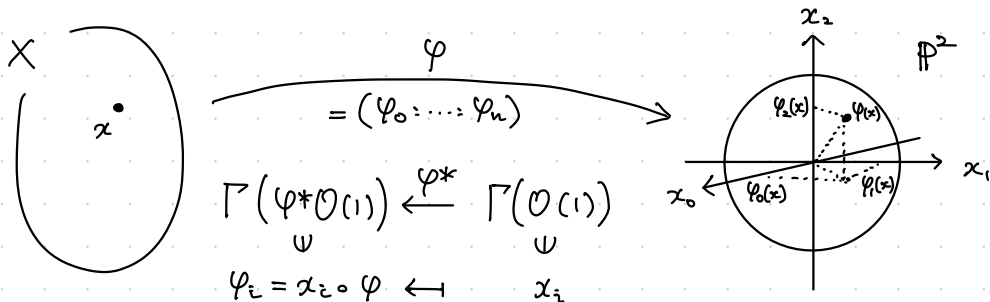
前半

◆ \mathbb{P}^n の射

スロ-ガン: \mathbb{P}^n の射をつくることは、

可逆層とその **大域生成系** を指定すること。

① \mathbb{P}^n の射とは、“**共通零点のない関数の組**” である。



② **共通零点を持たない** \Leftrightarrow 各 stalk でどれか $\neq 0$ unit
 $\Leftrightarrow \{\varphi_i\}$ は $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ を **大域生成** する。

③ 逆に $\mathcal{L} : \text{inv. shf.}$ と $\{s_i\} : \text{大域生成元}$ があれば、
 $X_{s_i} = \{p \in X \mid (s_i)_p \notin \mathfrak{m}_p\}$ が X を覆うので
 \downarrow
 $U_i = \{p \in \mathbb{P}^n \mid x_i(p) \neq 0\}$ をつくり、貼り合わせればよい。

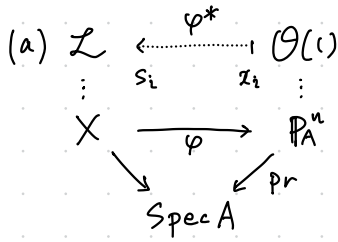
④ まとめ:

$$\left\{ X \text{ から } \mathbb{P}^n \text{ の射} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} : X \text{ 上 の inv. shf. と} \\ s_0, \dots, s_n \in \Gamma(\mathcal{L}) : \text{大域生成元} \end{array} \right\}$$

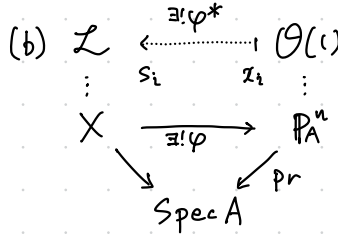
⑤ いつ開埋め込みになすか? (いつ潰れないか?)

\leadsto “点を持つベクトルを分離する” とき。

Thm. 7.1 $X : \text{環 } A \text{ 上のスキーム}$



- $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ は A 上の射とする.
- 大域切断 $s_i := \varphi^*(z_i)$ は可逆層 $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}$ を生成する.
- ($B \otimes_A M$ の生成元が $| \otimes (M$ の生成元) で取れる類似)



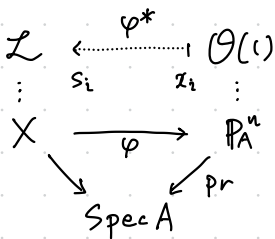
- 逆に $\mathcal{L} : X$ 上の可逆層が 大域切断 s_0, \dots, s_n で生成されるとする.
- ある $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n = A$ 上の射が一意に存在し $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ かつ $s_i = \varphi^*(z_i)$ となる.

Example 7.1.1.

◦ \mathbb{P}_k^n の自己同型は $\text{PGL}(n, k)$ の射.

- ⊙ $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{P}_k^n$ なる $\text{Pic } \mathbb{P}_k^n \cong \mathbb{Z}$ に自己同型を誘導するの $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(\pm 1)$. $\mathcal{O}(-1)$ は大域切断を持たないから $\mathcal{O}(1)$.
- $\mathcal{O}(1)$ の大域生成元 x_0, \dots, x_n について行列表示が得られる.

Prop. 7.2.



◦ φ が開埋め込み

- $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \forall z_i, X_{z_i} = \{P \in X \mid s_i|_P \notin \text{mp } \mathcal{L}_P\} \text{ が } \Gamma \text{ 上 } \Gamma \text{ 上} \\ (2) \forall z_i, A \left[\frac{x_0}{z_i}, \dots, \frac{x_n}{z_i} \right] \rightarrow \Gamma(X_{z_i}, \mathcal{O}_{X_{z_i}}) \text{ が全射} \\ ; \quad x_j/z_i \mapsto s_j/s_i \end{cases}$

Prop. 7.3 k : alg. closed. X : k 上射影的

$$\mathcal{L} \xleftarrow{\varphi^*} \mathcal{O}(1)$$

$$\vdots \quad s_i \quad z_i \quad \vdots$$

$$X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_k^n$$

$$\searrow \text{pr} \rightarrow \text{Spec } k$$

$$V := \text{span}_k(s_0, \dots, s_n) \subseteq T(X, \mathcal{L})$$

★ φ の閉埋め込み

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) V \text{ の元が点で分離する} \\ (2) V \text{ の元が接ベクトルで分離する} \end{cases}$$

ただし

(1) V の元が点で分離する

$$\overbrace{p \cdot Q}^{s=0}$$

: 0 次の情報

def \Leftrightarrow

$\forall p \neq q: X$ の閉点, $\exists s \in V,$

$$\begin{cases} \circ s|_p \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p \\ \circ s|_p \notin \mathfrak{m}_q \mathcal{L}_q \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \circ s|_p \notin \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p \\ \circ s|_p \in \mathfrak{m}_q \mathcal{L}_q \end{cases}$$

(2) V の元が接ベクトルで分離する

: 1 次の情報

def \Leftrightarrow

$\forall p: X$ の閉点,

$$\{s \in V \mid s|_p \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p\} \rightarrow \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p / \mathfrak{m}_p^2 \mathcal{L}_p$$

Examples.

送り先の接空間 $\leftrightarrow X$ の接空間

○ $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$: 3重埋め込み

$$[s:t] \mapsto [s^3:s^2t:st^2:t^3]$$

$\mathcal{O}(3)$ の大域生成元 s^3, s^2t, st^2, t^3 で定まる射.

$$\mathcal{O}(3) \leftarrow \mathcal{O}(1)$$

... 閉埋め込み.

○ $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$: 3重埋め込み もどき (Cusp)

$$[s:t] \mapsto [s^3:s^2t:t^3]$$

$\mathcal{O}(3)$ の大域生成元 s^3, s^2t, t^3 で定まる射.

$$\mathcal{O}(3) \leftarrow \mathcal{O}(1)$$

$$V = \langle s^3, s^2t, t^3 \rangle_k$$

○ 接ベクトルで分離しない. ($p = [0:1]$ における $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 = \langle s \rangle$ だけ)

○ 閉埋め込みでない. $\begin{matrix} s^3|_p, s^2t|_p \in \mathfrak{m}_p^2 \\ t^3|_p \notin \mathfrak{m}_p \end{matrix}$ より張るから.)

($[0:1]$ における stalk が全射にならない)

◆ 豊富存在可逆層

スローガン: 全ての連接層を“大域生成化”できるような可逆層は、“ $\mathcal{O}(1/n)$ ”である。

$$\{ \mathcal{L} = \text{inv. shf.}, \{s_i\}: \text{大域切断} \} \leftrightarrow \{ \varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n : \mathbb{A}^1 \}$$

① 問題意識: \mathcal{L} がどのくらい大域切断を **たくさん** 持てば、
... positivity
 射 φ を埋め込みにできるのだろうか?

② 答えに名前をつける: $X: \text{sch.}/A$

$$\mathcal{L}: \text{very ample rel. } A \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists i: X \xrightarrow{\text{imm.}} \mathbb{P}_A^n : \mathcal{L} = i^* \mathcal{O}(1)$$

直接埋め込みに $\text{rel. } A$ を定めてくれる
 \iff (そのまま座標関数の層 $\mathcal{O}(1)$ とみられるくらい)
 大域切断を **たくさん** 持つ。

③ (5.17 [Serre]) $X: \text{proj.}/A: \text{Noether}$. $\mathcal{L}: \text{very ample rel. } A$

$\forall \mathcal{F}: \text{coh. } \forall n \gg 0, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ は **fin. gl. gen.**

\hookrightarrow **very ample** なる、任意の coh. を **大域生成化** できる。
 : 基礎スキーム A による n 操作。

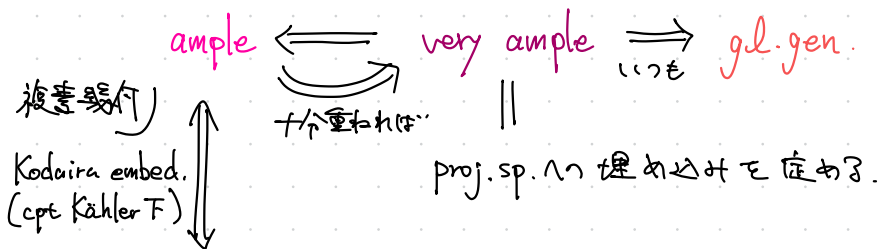
④ Def. $X: \text{Noether}$.

$$\mathcal{L}: \text{ample} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{任意の coh. } \mathcal{F} \text{ を } \text{大域生成化} \text{ できる.}$$

⑤ Thm. 7.6. $X: \text{f.t.}/A: \text{Noether}$.

$$\mathcal{L}: \text{ample} \iff \exists m, \mathcal{L}^m: \text{very ample rel. } A.$$

⑥ positivity とし の 関係 f.t./A : Noether. は 仮定.



曲率正の Hermite 計量が入る.
positive

⑥ \Leftarrow の 具体的な 存在状況での ampleness.

Example 7.6.1. (\mathbb{P}^n)

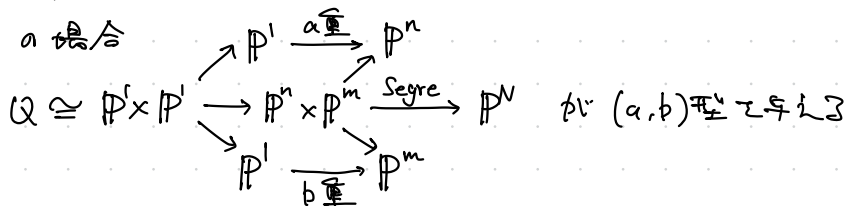
o $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ での $\mathcal{O}(d)$ 型の \mathcal{L} .

* $\mathcal{O}(d) : \text{ample} \Leftrightarrow \text{very ample} \Leftrightarrow \text{gd.gen.} \Leftrightarrow d > 0$

Example 7.6.2. $Q = \{xy = zw\} \subseteq \mathbb{P}^3$: 2次曲面.

o $\text{Pic}(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ として (a, b) 型 存在もつて考えた.
6.6.1

o $a, b > 0$ の 場合



o otherwise $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^1$ での gd.gen. 存在もつて ampleness も存在もつて.

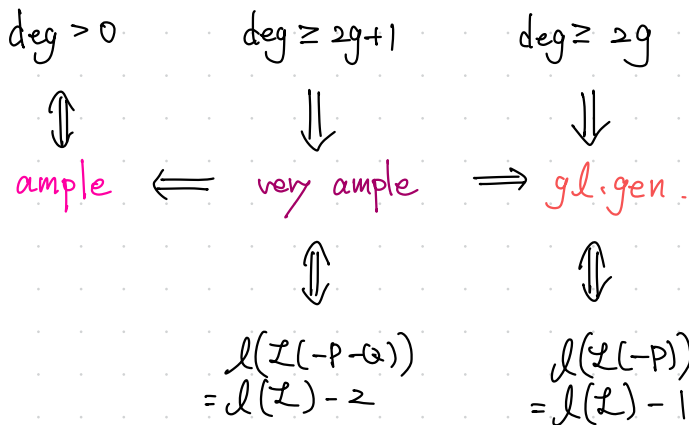
* $(a, b) : \text{ample} \Leftrightarrow \text{very ample} \Leftrightarrow \text{gd.gen.} \Leftrightarrow a, b > 0$

Example 7.6.3 & 7.6.4 & IV.3. X : 完备非特異曲线

$$\left[\begin{array}{l} \text{Riemann-Roch : } l(\mathcal{L}) \\ \text{ii} \\ \text{dim } \Gamma(\mathcal{L}) \end{array} = \text{deg } \mathcal{L} + 1 - g + (\text{補正}) \right. \\ \left. \text{deg } \mathcal{L} > 2g - 2 \rightarrow \text{消去了.} \right.$$

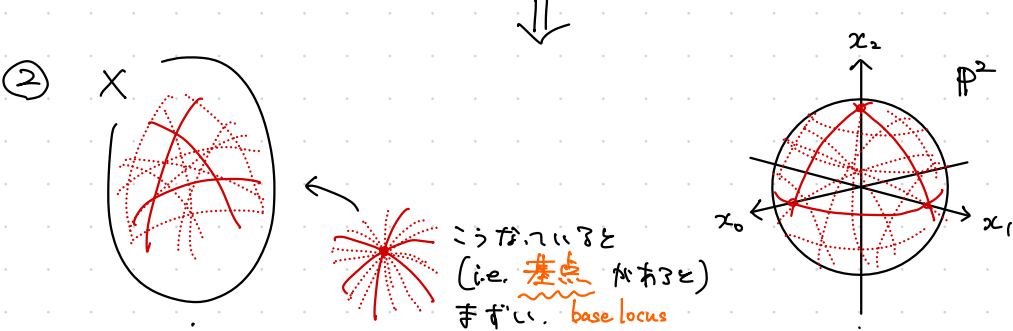
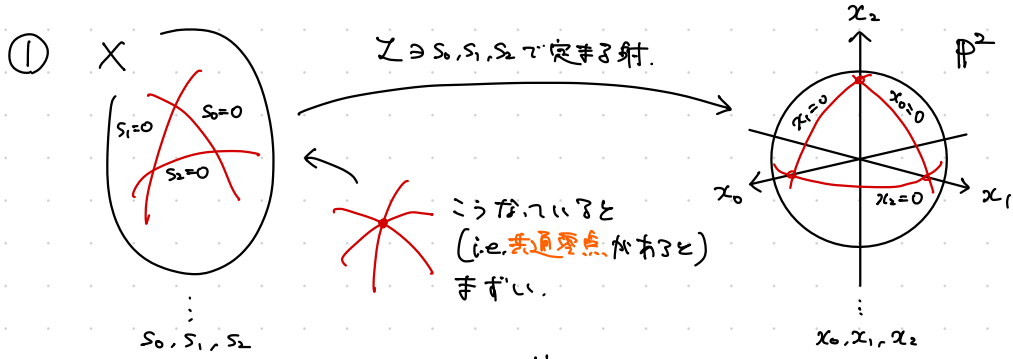
positivity etc. • $\text{deg} \geq 0$

• \mathcal{L} 非规则的 (曲线) \neq ; 此考虑了水了.



◆ 線形系 常に X : non-sing. proj. var. / k : alg. cl.

スロ-ガン: \mathbb{P}^n の射をつくることは、
 基点のない線形系を指定すること。



③ $\{as_0 + bs_1 + cs_2\} \setminus \{f_0\} \quad \{ax_0 + bx_1 + cx_2\} \setminus \{f_0\}$

$= \langle s_0, s_1, s_2 \rangle \setminus \{f_0\} \subseteq \Gamma(Z) \setminus \{f_0\} \quad = \Gamma(O(1)) \setminus \{f_0\}$

$\downarrow \quad \downarrow$ k 倍は同心図形 \downarrow

$\vartheta = P(V) \quad \subseteq \quad P(\Gamma(Z(O)))$

線形系 $\quad \quad \quad$ 自備線形系

射影空間の開点集合の構造をもつ。

④ ϑ : bs. free lin. sys. により定まる射とは、 $X \rightarrow P(V^\vee)$ である。(良い表示!)

$x \mapsto \ker(\text{ev}_x)$

Construction. (零点かゝる定数因子)

\mathcal{L} : inv. shf. on X , $s \in \Gamma(\mathcal{L})$.

\mathcal{L} の自明化 $\varphi: \mathcal{L}|_{\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\sigma} \simeq \mathcal{O}_k \simeq \varphi(s|_{\sigma}) \in \Gamma(\mathcal{O}_{\sigma})$ を集めて
有効 Cartier 因子 $\{\sigma, \varphi(s|_{\sigma})\}$ が定まる.

これを $(s)_0$ とかき、**零点かゝる定数因子 (divisor of zeros)** という.

例 $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$, $s = x_0$

$$\left. \begin{array}{c} \textcircled{Q = [i:0]} \\ \textcircled{P = [0:i]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi_1: \mathcal{L}|_{\sigma_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\sigma_1} = k\left[\frac{x_1}{x_0}\right] ; x_0 \mapsto 1 \\ \varphi_0: \mathcal{L}|_{\sigma_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\sigma_0} = k\left[\frac{x_0}{x_1}\right] ; x_0 \mapsto \frac{x_0}{x_1} \end{array} \quad \text{f)} (s)_0 = P$$

Prop. 7.7. D : X 上の因子

$$\mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{L}(D))) \xrightarrow{(-)_0} |D| \quad : \text{bij.}$$

Def. D : X 上の因子

◦ $|D| = \{D' \mid D' \sim D, D' \geq 0\}$: **完備線形系 (complete linear system)**

これは前 Prop f) 射影空間の開点集合の構造を持つ.

◦ $\mathfrak{d} \in |D|$ は、 $\Gamma(\mathcal{L}(D)) - \{0\} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{d}}} |D|$ に \mathfrak{d} を写像 $\cup \{0\}$ に \mathfrak{d} を

$\mathcal{V} \subseteq \Gamma(\mathcal{L}(D))$: lin. sub.sp. と \mathfrak{d} をとるとき、**線形系 (linear system)** という.

\mathfrak{d} は線形系も射影空間の開点集合の構造を持つ.

◦ $\dim \mathfrak{d} := \dim \mathcal{V} - 1 = (\text{射影空間としての次元})$: 次元

◦ $\text{bs } \mathfrak{d} := \bigcap_{D \in \mathfrak{d}} \text{Supp } D$ (Quiz: $\text{Supp } D \in \mathfrak{d}$?) : **基点 (の集合)**

$$\stackrel{\text{Lem. 7.8}}{=} \bigcap_{s \in \mathcal{V}} \text{Supp } s$$

Caution 7.8.1.

$$\circ \left\{ X \text{ が } \mathbb{P}^n \text{ への射} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{d} : \text{bs-free 線形形系と} \\ s_0, \dots, s_n : \text{対応する } \mathbb{V} \text{ を張子元} \end{array} \right\}$$

（後半を省略するとき、 \mathbb{V} の基底を選ぶとす。）

Caution 7.8.2.

$\mathfrak{d} : \text{bs-free lin. sys.}$ $\varphi : \text{対応する射.}$

$$\star \varphi \text{ が開埋め込み} \iff \begin{cases} (1) \mathfrak{d} \text{ が点を分離する} \\ (2) \mathfrak{d} \text{ が接ベクトルを分離する} \end{cases}$$

ただし

(1) \mathfrak{d} が点を分離する



: 0次の情報

$\forall P \neq Q : X \text{ の閉点, } \exists D \in \mathfrak{d},$



- $\circ P \in \text{Supp } D$
- $\circ P \notin \text{Supp } D$

(2) \mathfrak{d} が接ベクトルを分離する



: 1次の情報



$\forall P : X \text{ の閉点, } t \in T_P(X) = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^\vee, \exists D \in \mathfrak{d},$

$P \in \text{Supp } D \text{ かつ } t \notin T_P(D) = (\mathfrak{m}_{P,D}/\mathfrak{m}_{P,D}^2)^\vee$

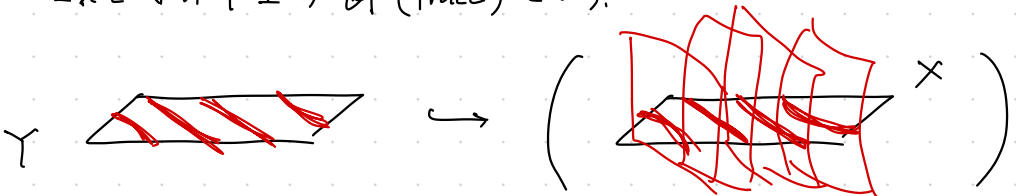
対応する局所的に主な開部分 $\neq \emptyset$

Def. $\iota : Y \hookrightarrow X : \text{non-sing. proj. var. / } k \text{ の cl. imm.}$

$\mathfrak{d} : X \text{ の線形形系に対し, 対応する } \mathcal{L} \in \mathbb{V} \subseteq \Gamma(\mathcal{L}) \text{ を } \iota^*$

$\mathfrak{d}|_Y : Y \text{ の線形形系を } \iota^*\mathcal{L} \in \text{Im}(\mathbb{V} \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(\iota^*\mathcal{L})) \text{ に定めた.}$

これを \mathfrak{d} の Y 上の跡 (trace) といい.



< 余談: 群形系の利用 > cf. Bădescu, Algebraic Surfaces

~ Settings ~

- X : 代数閉体 k 上の非特異射影的曲面
- $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$: X 上の連結な曲線とその相異なる整部分
- $G = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} E_i$: $\{E_i\}$ で生成される自由 Abel 群
(台 $\subseteq E$ なる因子全体と考える.)
- $G_{\geq 0}, G_{> 0}, G_{\geq E}$: 有効, 正, 全ての係数 ≥ 1 なる部分集合 $\subseteq G$
- 以下をみたす $f: X \rightarrow Y$ を, E に沿って X の contraction と呼ぶ.

$\downarrow Y$: normal proj. sur. で、閉点 $y \in Y$ があり、 $f^{-1}(y) = E$ かつ $X \setminus E \xrightarrow{f} Y \setminus \{y\}$

Thm. 3.9. (M. Artin) TFAE

- (1) E に沿って X の contraction $f: X \rightarrow Y$ があり、 $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$
- (2) 交叉行列 $\|(E_i \cdot E_j)\|$ は負定値かつ $\rho_a(z) \leq 0$ ($\forall z \in G_{> 0}$)

(1) \Rightarrow (2): 負定値性は Hodge 指数定理とか使うと出る. ρ_a は下に同じ.

(2) \Rightarrow (1): χ の主張は Leray spec. seq. と形式函数定理による計算から出る.

めっちゃかんばると、以下の性質をもつ因子 Z を構成できる.

1) H : very ample divisor で、 $H^i(X, \mathcal{O}(H))$ が $i > 0$ で消えるもの

2) $Z \in G_{\geq E}$ で、 $(H+Z, E_i) = 0$ ($\forall i$) なるもの

3) $D \in |H+Z|$ で、 Z への制限が nowhere zero なるもの

すると 1) 3) より $|H+Z|$ は bs. free で $X \setminus E$ 上の点と接方向を分離.

2) より $f: X \rightarrow \mathbb{P}(H^0(H+Z))$ は E を 1 点に送る.

f の scheme theoretic image の normalization が求まる Y がある. \square